Πρόχειρες σημειώσεις διαλέξεων

7η Εβδομάδα

Εξισώσεις Ανώτερης Τάξης

Θα εφαρμόσουμε τα αποτελέσματα τις προηγούμενης παραγράφου στις εξισώσεις n ταξεως. Έστω έχουμε μια διαφορική εξίσωση n-οστης τάξης

$$y^{(n)}(t) = f(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{2.1}$$

σε συνδυασμό με τις αρχικές συνθήκες

$$y(t_0) = c_1, \quad y'(t_0) = c_2, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = c_n, \tag{2.2}$$

όπου $y^{(k)}$ όπως πάντα συμβολίζει την k-οστη παράγωγο της $y(t)$ ως προς t. Για να διατυπώσουμε το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας για το πρόβλημα (2.1), (2.2) θα περάσουμε από την (2.1) σε ένα σύστημα εξισώσεων πρώτης τάξης. Για αυτό το σκοπό εισάγουμε νέες συναρτήσεις με τον εξής τρόπο:

$$\begin{gathered} x_1(t) = y(t), \\ x_2(t) = y'(t), \\ x_3(t) = y''(t), \\ \ldots \\ x_{n-1}(t) = y^{(n-2)}(t), \\ x_n(t) = y^{(n-1)}(t). \end{gathered}$$

Για την διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ θα πάρουμε το εξής σύστημα πρώτης τάξης

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = x_4 \\ \ldots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = f(t, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \end{cases} \tag{2.3}$$

Δηλαδή στο σύστημα (0.1) παίρνουμε

$$\Phi_1 = x_2, \ \ldots, \ \Phi_{n-1} = x_n, \ \Phi_n = f(t, \mathbf{x}).$$

Οι αρχικές συνθήκες (2.2) θα πάρουν τη μορφή

$$x_1(t_0) = c_1, \quad x_2(t_0) = c_2, \quad \ldots, \quad x_n(t_0) = c_n \ \text{ ή } \ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}. \tag{2.4}$$

Παράδειγμα 2.1 Γράψτε το πρόβλημα $Cauchy$

$$y''' + y^2 = sin\, t,$$

$$y(0) = 0, \ \ y'(0) = 1, \ \ y''(0) = -1,$$

ως πρόβλημα $Cauchy$ για σύστημα εξισώσεων 1-ης τάξης.

Λύση. Θέτουμε $x_1 = y$, $x_2 = y'$, $x_3 = y''$, τότε

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \ \ x_1(0) = 0,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_3, \quad x_2(0) = 1,$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -x_1^2 + sin\, t, \quad x_3(0) = -1.$$

$\star$

Βλέπουμε ότι αν η συνάρτηση $y(t)$ είναι λύση του προβλήματος (2.1), (2.2) (της εξίσωσης (2.1)), τότε η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{x}(t)$ είναι λύση του προβλήματος (2.3), (2.4) (του συστήματος (2.3)). Προφανώς ισχύει και το αντίστροφο, πράγματι, από το σύστημα (2.3) έχουμε ότι

$$x_1'' = x_3, \quad x_1''' = x_4, \quad ..., x_1^{(n-1)} = x_n,$$

συνεπώς

$$x_1^{(n)} = f(t, x_1, x_1', ..., x_1^{(n-1)}).$$

Επίσης

$$x_1(t_0) = c_1, \quad x_1'(t_0) = c_2, \quad \ldots, \quad x_1(n-1)(t_0) = c_n.$$

Δεδομένου ότι $y = x_1$, έχουμε το ζητούμενο.

Σύμφωνα με το θεώρημα 1.4 (ύπαρξης και μοναδικότητας για τα συστήματα πρώτης τάξης) έχουμε, ότι για να υπάρχει μια και μοναδική λύση του προβλήματος (2.3), (2.4) το δεύτερο μέρος της (2.3) πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη του *Lipschitz* ως προς $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Το δεύτερο μέρος της (2.3) είναι

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t) = (x_2,\, x_3\, \ldots,\, x_n,\, f(t, \mathbf{x}))$$

άρα

$$|\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{\Phi}(\mathbf{y}, t)| =$$

$$\sqrt{(x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 + (f(t, \mathbf{x}) - f(t, \mathbf{y}))^2} \leq \tag{2.5}$$

$$\leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + |f(t, \mathbf{x}) - f(t, \mathbf{y})|,$$

όπου $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$. Αν

$$|f(t, \mathbf{x}) - f(t, \mathbf{y})| \leq \tilde{K}|\mathbf{x} - \mathbf{y}|,$$

τότε

$$|\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{\Phi}(\mathbf{y}, t)| \leq K|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \text{ με } K = 1 + \tilde{K}.$$

Συνεπώς από την (2.5) προκύπτει ότι, αν η $f(t, \mathbf{x})$ είναι συνεχής ως προς t και *Lipschitz* συνεχής ως προς $\mathbf{x}$, τότε υπάρχει μια και μοναδική λύση του συστήματος (2.3) που ικανοποιεί την (2.4). Έτσι, δεδομένου ότι, όπως διαπιστώσαμε, τα προβλήματα (2.1), (2.2) και (2.3), (2.4) είναι ισοδύναμα, από τα Θεωρήματα 1.4 (*Picard*) και 1.5 (*Peano*) έχουμε:

Θεώρημα 2.1. *Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση της μεταβλητής t και ικανοποιεί την συνθήκη του Lipschitz ως προς τις υπόλοιπες μεταβλητές σε κάποια περιοχή του σημείου $(t_0, \mathbf{c})$, τότε υπάρχει μια και μοναδική τοπική λύση της (2.1) που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες (2.2).*

Θεώρημα 2.2. *Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση των μεταβλητών $(t, \mathbf{x})$ σε κάποια περιοχή του σημείου $(t_0, \mathbf{c})$, τότε υπάρχει τοπική λύση της (2.1) που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες (2.2).*

Αν η εξίσωση (2.1) είναι γραμμική δηλαδή

$$f(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) y^{(k)} + g(t),$$

τότε το σύστημα (2.3) παίρνει τη μορφή

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = x_4 \\ \dots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) x_{k+1} + g(t) \end{cases}$$

Άρα η (2.5) θα επαληθεύετε για κάθε $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ και ως συνέπεια εξασφαλίζεται η ολική ύπαρξη της λύσης του προβλήματος (2.1), (2.2). Πράγματι η (2.5) παίρνει τη μορφή

$$|\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{\Phi}(\mathbf{y}, t)| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + \Big| \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)(x_{k+1} - y_{k+1}) \Big| =$$

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| + |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})|$$

όπου $\mathbf{a} = (a_0, ..., a_{n-1})$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $Cauchy-Schwartz$, έχουμε

$$|\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{\Phi}(\mathbf{y}, t)| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + |\mathbf{a}||\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq K|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$$

με

$$K = 1 + \max_t \Big(\sum_{i=0}^{n-1} a_i^2(t) \Big)^{1/2}.$$

Άρα έχουμε:

Θεώρημα 2.3. *Αν η*

$$f = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) y^{(k)} + g(t)$$

όπου οι $a_i(t)$, $g(t)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάτημα I ($t_0 \in I$), τότε υπάρχει μια και μοναδική ολική (δηλαδή σε όλο το I) λύση του προβλήματος (2.1), (2.2).

Όπως έχουμε δεί κάθε εξίσωση n τάξεως ανάγεται σε ένα σύστημα n εξισώσεων πρώτης τάξης. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα. Έχουμε δει ότι το σύστημα (2.3) ανάγεται στην εξίσωση (2.1). Θα διαπιστώσουμε ότι στην περίπτωση που οι συντελεστές και το δεύτερο μέρος ενός συστήματος είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε το σύστημα ανάγεται σε μια εξίσωση τουλάχιστον τοπικά. Θα το αποδείξουμε για συστήματα δυο εξισώσεων (η περίπτωση περισσότερων εξισώσεων αντιμετωπίζεται παρομοίως). Θα γράφουμε x, y αντι για x_1, x_2 και f, g αντί για Φ_1, Φ_2.

Θεωρούμε το εξής σύστημα

$$\begin{cases} x' = f(x, y, t), \\ y' = g(x, y, t) \end{cases}$$

Έχουμε

$$x'' = f_x(x, y, t)x' + f_y(x, y, t)y' + f_t(x, y, t) =$$

$$f_x(x,y,t)x' + f_y(x,y,t)g(x,y,t) + f_t(x,y,t). \tag{2.6}$$

Έστω ότι $f_y \neq 0$ για κάποιο y, τότε την πρώτη εξίσωση (χρησημοποιόντας το Θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης) μπορούμε τοπικά να την λύσουμε ως προς y δηλαδη να την γράψουμε σε μορφή

$$y = h(x, x', t).$$

Τότε η (2.6) θα πάρει τη μορφή

$$x'' = f_x(x,y,t)x' + f_y(x,y,t)g(x,y,t) + f_t(x,y,t)\Big|_{y=h(x,x',t)} = F(t,x,x').$$

Παρατηρούμε ότι χρειαστήκαμε την παραγωγισιμότητα μονο της f, προφανώς μπορούμε να παραγωγίσουμε τη δευτερη εξίσωση και σε αυτήν την περίπτωση θα πρέπει να είναι παραγωγίσιμη μόνο η g συν το ότι $g_x \neq 0$ για κάποιο x.

Παράδειγμα 2.2. Ανάγετε το σύστημα

$$\begin{cases} x' = a(t)x + b(t)y, \\ y' = c(t)x + d(t)y \end{cases}$$

σε μια εξίσωση, υποθέτουμε πως οι

$$a(t),\ b(t),\ c(t),\ d(t)$$

είναι $\mathbf{C}^1$ συναρτήσεις και $b(t) \neq 0$.

Λύση. Έχουμε

$$x'' = a\,x' + b\,y' + a'x + b'y = a\,x' + b(c\,x + d\,y) + a'x + b'y =$$
$$a\,x' + bc\,x + (bd + b')y + a'x.$$

Από την πρώτη εξίσωση έχουμε

$$y = \frac{x' - a\,x}{b}, \tag{2.7}$$

άρα

$$x'' = a\,x' + bc\,x + (bd + b')\frac{x' - a\,x}{b} + a'x$$

και

$$x'' = \big(a + d + \frac{b'}{b}\big)x' + \big(bc - da - a\frac{b'}{b} + a'\big)x. \tag{2.8}$$

Συνεπώς αν θέλουμε να βρούμε τη λύση του συστήματος μπορούμε πρώτα να προσδιορίσουμε την $x(t)$ από (2.8) και μετά την $y(t)$ από (2.7). $\star$

Συστήματα Ανώτερης Τάξης

Παρομοίως με μια εξίσωση ανώτερης τάξης, σε ενα σύστημα εξισώσεων πρώτης τάξης ανάγεται και οποιοδήποτε σύστημα εξισώσεων ανώτερης τάξης. Θα περιοριστούμε με το εξής σύστημα:

$$\begin{aligned} x''(t) &= F_1(t, x(t), y(t), z(t), x'(t), y'(t), z'(t)) \\ y''(t) &= F_2(t, x(t), y(t), z(t), x'(t), y'(t), z'(t)) \\ z''(t) &= F_3(t, x(t), y(t), z(t), x'(t), y'(t), z'(t)) \end{aligned} \tag{3.1}$$

που είναι ο νόμος του Νεύτωνα αν $(x(t), y(t), z(t))$ είναι η θέση ενός υλικού σημείου στη χρονική στιγμή t. Εισάγουμε νέες συναρτήσεις με τον εξής τρόπο:

$$x_1(t) = x(t), \quad x_2(t) = x'(t),$$
$$x_3(t) = y(t), \quad x_4(t) = y'(t),$$
$$x_5(t) = z(t), \quad x_6(t) = z'(t).$$

Για την διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_6(t))$ θα πάρουμε το εξής σύστημα πρώτης τάξης

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = F_1(t, x_1, x_3, x_5, x_2, x_4, x_6) \\ x_3' = x_4 \\ x_4' = F_2(t, x_1, x_3, x_5, x_2, x_4, x_6) \\ x_5' = x_6 \\ x_6' = F_2(t, x_1, x_3, x_5, x_2, x_4, x_6) \end{cases} \tag{3.2}$$

Αν έχουμε πρόβλημα αρχικών τιμών (3.1), (3.3) όπου

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_0^1, \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0^1,$$
$$z(t_0) = z_0, \quad z'(t_0) = z_0^1, \tag{3.3}$$

αυτό ανάγεται στο πρόβλημα (3.2), (3.4) όπου

$$x_1(t_0) = x_0, \quad x_2(t_0) = x_0^1, \quad x_3(t_0) = y_0, \quad x_4(t_0) = y_0^1,$$
$$x_5(t_0) = z_0, \quad x_6(t_0) = z_0^1. \tag{3.4}$$

Συνεπώς η μελέτη του προβλήματος (3.1), (3.3) (ύπαρξη, μοναδικότητα κλπ) ανάγεται στη μελέτη του προβλήματος (3.2), (3.4). Από το Θεώρημα *Picard* προκύπτει ότι άν η

Ας το γράψουμε σε διανυσματική μορφή. Έστω $\mathbf{r}(t)$ - διάνυσμα θέσης

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Τότε το πρόβλημά μας μπορούμε να το γράψουμε ως

$$\mathbf{r}'' = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{r}'(t_0) = \mathbf{r}_0^1,$$

όπου

$$\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3), \quad \mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0), \quad \mathbf{r}_0^1 = (x_0^1, y_0^1, z_0^1).$$

Από το Θεώρημα *Picard* προκύπτει ότι αν η $\mathbf{F}$ είναι συνεχής ως προς t και *Lipschitz* συνεχής ως προς τις υπόλοιπες μεταβλητές, τότε υπάρχει μοναδική τοπική λύση του προβλήματος (3.1), (3.3). Αν η σταθερά *Lipschitz* δεν εξαρτάται από τις μεταβλητές $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$, τότε έχουμε μοναδική ολική λύση. Αν η $\mathbf{F}$ είναι απλώς συνεχής συνάρτηση όλων των μεταβλητών της, τότε πάλι έχουμε τοπική λύση, αλλά εν γένει όχι μοναδική.

Γραμμικά Συστήματα Πρώτης Τάξης

Η γενική μορφή ενός γραμμικού συστήματος πρώτης τάξης είναι

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j + f_i(t), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{0.1}$$

ή, πιο αναλυτηκά

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t),$$
$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t),$$
$$\vdots$$
$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t).$$

Θα συμβολίσουμε με $\mathbf{A}(t) = (a_{ij}(t))$ τον πίνακα συντελεστών του (0.1), δηλαδή

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ & & \vdots & \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

με

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

το διάνυσμα των άγνωστων συναρτήσεων και με

$$\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

το διάνυσμα των δεύτερων μέρων των εξισώσεων του συστήματος (0.1). Χρησιμοποιώντας αυτούς τους συμβολισμούς θα ξαναγράψουμε την (0.1) σε μορφή

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \text{ ή } \mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \tag{0.2}$$

εδώ παίρνουμε τα διανύσματα ως στήλη και όχι ως γραμμή ε.ω. το γινόμενο πίνακας επί διάνυσμα να μας δώσει το (0.1). Προφανώς το διάνυσμα μπορούμε να το γράφουμε και ως στήλη και ως γραμμή. Στη συνέχεια θα υποθέτουμε ότι οι $a_{ij}(t)$ και $f_i(t)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, b]$. Υπό αυτές τις προϋποθέσεις αμέσως έχουμε το θεώρημα ολικής ύπαρξης και μοναδικότητα της λύσης για την (0.2) με αρχικές συνθήκες

$$\mathbf{x}(t_0) = c \tag{0.3}$$

αφού η

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$$

ικανοποιεί όλες τις συνθήκες του Θεωρήματος 1.3 Κεφάλαιο 3. Πράγματι, όπως έχουμε ήδη διαπιστώσει στο προηγούμενο κεφάλαιο,

$$|\mathbf{\Phi}(\mathbf{x},t)-\mathbf{\Phi}(\mathbf{y},t)| \leq K|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \ \ \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n, \ \ \text{με} \ \ K=\max_{t\in[a,b]}\|\mathbf{A}(t)\|$$

όπου $\|\mathbf{A}(t)\|$ είναι το μέτρο (νόρμα) του πίνακα $\mathbf{A}$. Αρα ισχύει το εξής

Θεώρημα 0.1. *Αν οι συναρτήσεις $a_{ij}(t)$, $f_i(t)$, $i,j=1,...,n$ είναι συνεχείς στο $|t-t_0| \leq T$, τότε το πρόβλημα $Cauchy$ (0.2), (0.3) έχει μία και μοναδική λύση στο $|t-t_0| \leq T$.*

Προφανώς, αν οι συναρτήσεις $a_{ij}(t)$, $f_i(t)$ είναι συνεχείς σε όλο το $\mathbf{R}$, τότε υπάρχει μοναδική λύση στο $|t-t_0| < +\infty$ δηλαδή σε όλο το $\mathbf{R}$.